APPUNTI DI ANALISI II ◆ A.A. 2015/16

Come richiestomi,
condivido gli appunti che ho ricopiato direttamente da quelli presi a lezione.
Non ho, tuttavia, ancora preparato l'esame.
Grandi errori non ci dovrebbero essere, ma potrebbero esserci imprecisioni.
Sono stati ricopiati anche gli esercizi, ma ho tralasciato quelli ripetitivi.
Detto ciò, buono studio. L. Lamb

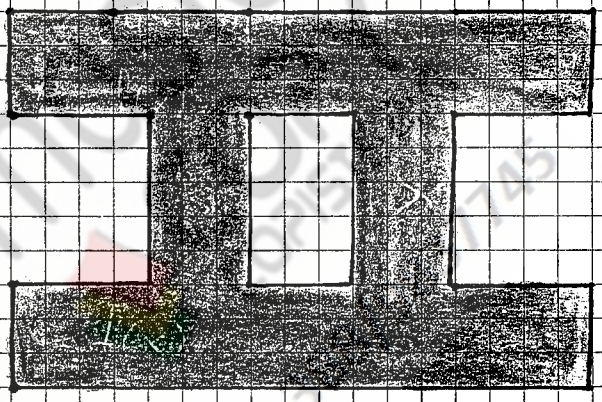
CONVENZIONI USATE:

→ teoremi, osservazioni, esercizi e dimostrazioni sono sempre introdotti specificando di che cosa si tratti
→ le definizioni sono indicate dal simbolo $:=$ $=:$ $\doteq$ e, spesso, introdotte, in maiuscolo, da ciò che si definisce
→ le proposizioni sono introdotte da una maiuscola corsiva
→ ciò che non riguarda i punti precedenti è specificato di volta in volta.


master
COPY
COPISTERIA
050/8312126 388/9837745

COMPLEMENTI DI ANALISI MATEMATICA :)

Analisi



DOCENTE VALENTINO MAGNANI

RICEVIMENTO venerdì pomeriggio tramite e-mail

MATERIALE DIDATTICO LIBRI:

ESERCIZI talvolta presenti anche sul suo sito

master COPY COPISTERIA

25/9/2015 TOPOLOGIA IN $\mathbb{R}^n$

→ Si lavora in $\mathbb{R}^n$ con $n \geq 2$

→ $\mathbb{R}^n$ è uno spazio vettoriale, cioè $v, w \in \mathbb{R}^n$, $\lambda, \tilde{\lambda} \in \mathbb{R}$
$\Rightarrow \lambda v + \tilde{\lambda} w \in \mathbb{R}^n$

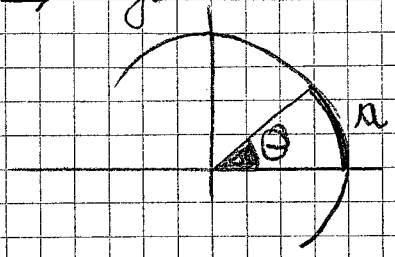
→ NORMA EUCLIDEA in $\mathbb{R}^n$

$$|X| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$$

se $n=1 \Rightarrow |X| = \sqrt{X^2}$

se $n=2 \Rightarrow$ teorema di Pitagora.

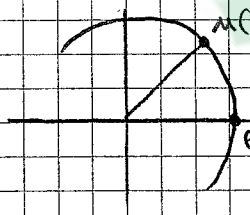
→ angolo: $\Theta = \frac{l(a)}{r}$



→ $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$\langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$$

ed è invariante per la rotazione

→ 

$|u| = (x^2+y^2)^{\frac{1}{2}} = 1$

$\langle u, e_1 \rangle = x = \cos\Theta$

$y = \operatorname{sen}\Theta$

con Θ angolo convesso tra u ed e_1

→ PROPRIETÀ DELLA NORMA EUCLIDEA

I) $|\lambda x| = |\lambda| |x| \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^n$

dim: $|\lambda x| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\lambda_i x_i)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\lambda x_i)^2} = \sqrt{\lambda^2 \sum_{i=1}^{n} x_i} =$

$= \sqrt{\lambda^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i} = |\lambda| |x|$

II) $|x+y| \leq |x| + |y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$

III) $||x| - |y|| \leq |x - y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$

dim: $|x| = |x - y + y| \overset{\text{II Propr.}}{\leq} |x-y| + |y|$

$\Rightarrow ||x| - |y|| \leq |x - y|$

→ TEOREMA: $\forall\, x, y \in \mathbb{R}^n \quad \langle x, y \rangle = |x||y| \cos\theta$

→ TEOREMA DI CHAUCHY-SWARZ: $\forall\, x, y \in \mathbb{R}^n$

I) $|\langle x, y \rangle| \leq |x||y|$

dim: $|\langle x, y \rangle| = ||x||y|\cos\theta| \leq |x||y|$

II) $|x+y| \leq |x| + |y|$

dim: poiché $|v| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$ (vedi II notazioni)

$\Rightarrow |x+y| = \sqrt{\langle x+y, x+y \rangle} \overset{\text{(vedi II notazioni)}}{=} \sqrt{\langle x, x \rangle + \langle y, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle} =$

$= \sqrt{|x|^2 + |y|^2 + 2\langle x, y \rangle} \overset{\text{PUNTO I}}{\leq}$

$\leq \sqrt{|x|^2 + |y|^2 + 2|x||y|} = \sqrt{(|x|+|y|)^2} = |x| + |y|$

→ PROPRIETÀ DEL PRODOTTO SCALARE con $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$; $x, y, z \in \mathbb{R}^n$

I) $\langle x, \lambda y + \mu z \rangle = \lambda \langle x, y \rangle + \mu \langle x, z \rangle$

dim: $\langle x, \lambda y + \mu z \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i (\lambda y_i + \mu z_i) = \sum_{i=1}^{n} (\lambda x_i y_i + \mu x_i z_i)$

$= \lambda \sum_{i=1}^{n} (x_i y_i) + \mu \sum_{i=1}^{n} (x_i z_i) = \lambda \langle x, y \rangle + \mu \langle x, z \rangle$

II) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$

III) $|x| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$

dim: $\sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i x_i} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = |x|$

→ SPAZIO APERTO = con $x \in \mathbb{R}^n$, $r \in \mathbb{R}_0^+$, si dice aperto $B(x,r)$

$$B(x,r) = \{ y \in \mathbb{R}^n \mid |y - x| < r \},$$

cioè l'insieme dei punti che distano meno di r da x.